* 学术论文 *

具有马氏转换的离散随机系统的性能分析*

张 波 张景肖
中国人民大学统计学院，北京 100872

摘要 研究了具有马氏转换参数的离散随机系统，分析了系统的鞅性质、马氏性、常返性、不可约性和收敛性.

关键词 马氏转换参数 离散随机系统 鞅 马氏性

随着计算机和相关学科的发展，对确定性的离散系统已进行了深入的研究，并取得了丰富的成果，但关于离散随机系统，特别是非线性的离散随机系统的研究尚不多见. 马氏系统在控制论、通讯工程、系统工程、运筹学、数值模拟、群体增长乃至人文社科领域的研究中都扮演着重要的角色[1~5]，应用学科中面临的许多非线性的离散随机系统的问题急需新的突破. 作者在文献[6]的基础上，对离散随机系统展开了研究，给出了系统具有鞅性质、构成 Markov 链的条件、常返性和不可约性判据以及系统的渐进分析. 目标是研究带有空间参数的离散鞅生成的离散随机控制系统，由于 Ito 积分的鞅性质，我们所讨论的系统可以视为带有转换的扩散系统的离散化，有关该系统的实际模型可参见文献［7～9］. 另一方面，我们所讨论的离散随机系统也是线性状态空间模型[10]的扩充. 很多系统工程与时间序列中等实际模型都可以纳入这类系统的框架进行分析.

以下，我们简称这类系统为离散随机控制系统. 文中所有的随机变量都是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，所有随机序列关于 σ-代数 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数流 $\{\mathcal{F}_k: k=0, 1, \cdots\}$ 都是适应的. 由于所讨论的是由带空间参数离散鞅导出的随机序列，所以是基于适当的序列空间. 关于序列空间、函数空间、空间上的距离，离散鞅和带空间参数离散鞅等术语均沿用文献[6]和[11]中的记号. 这里只列出如下几个常用到的.

对于 $\mathbb{R}^d$-值随机序列空间 $l_\infty = l_\infty(\mathbb{R}^d)$，对任意的两个 l_∞ 中的随机序列 $X=\{X_k\}$ 和 $Y=\{Y_k\}$，定义它们之间的距离 ρ 为

$$\rho(X, Y) = E\left[\frac{\sup|X_k - Y_k|^2}{1+\sup|X_k - Y_k|^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{并记 } l_\infty = (l_\infty, \rho).$$

定义

$$l_{(2)} := \{X \in l_\infty : \|X\|_{(2)} = (E[\sup|X_k|^2])^{\frac{1}{2}} < \infty\},$$

$$\mathcal{M}_0 := \{X \in l_{(2)} : X \text{ 是一个鞅}, X_0 = 0\},$$

$$\mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}} := \{X \in l_\infty : X \text{ 是一个局部鞅}, X_0 = 0\}.$$

1 系统的鞅性质和收敛性

考虑如下两种形式的离散随机控制系统

$$Y_{k+1}(\omega) = M(Y_k, \theta_{k+1}, k+1, \omega), \quad Y_0(\omega) = y_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

以及

$$Y_{k+1}(\omega) = Y_k + M(Y_k, \theta_k, k+1, \omega) - M(Y_k, \theta_k, k, \omega), \quad Y_0(\omega) = y_0 \in \mathbb{R}^d, \tag{2}$$

2003-04-01 收稿，2003-06-06 收修改稿
* 教育部科学技术重点项目和北京市自然科学基金资助（批准号：1022004）
E-mail: mabzhang@sohu.com.ac.cn

其中控制参数 θ_k 是一个具有有限状态空间的 $\mathcal{F}_k$-Markov 链，我们用 $\{1, 2, \cdots N\}$ 来表示它的状态空间. $M(x, s, k, \omega)$ 是$\mathbb{R}^d$-值的 $\mathcal{F}_k$-适应序列，$x\in\mathbb{R}^d$ 是空间参数，$s\in\mathbb{N}$ 是控制参数，并且它关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{B}(\mathbb{N})\times\mathcal{F}_k$-可测.

有如下适应性定理：

定理1 设 $M(x, s, k, \omega)$ 是具有参数 x 和 s 的适应序列. 当 θ_0 给定时，由(1)式确定的序列是 $\mathcal{F}_k$ 适应的. 特别的，如果对 $\forall k, n$, $M(x, n, k, \omega)$ 有一个关于 $x\in\mathbb{R}^d$ 连续的修正，则由(1)式确定的序列是惟一的.

证 首先，序列可以递归得到. 关于解的适应性：用归纳法，显然 Y_0 是 $\mathcal{F}_0$ 可测的，设 Y_k 关于 $\mathcal{F}_k$ 可测，注意到

$$Y_{k+1} = M(Y_k, \theta_{k+1}, k+1, \omega) = \sum_{n=0}^{N} M(Y_k, n, k+1, \omega)\chi_{\{n=\theta_{k+1}\}} \quad (3)$$

是 $\mathcal{F}_{k+1}$-可测的. 这是因为对 $\forall n$, $M(Y_k, n, \omega, k+1)$ 关于 $\mathcal{F}_{k+1}$ 可测，又 θ_k 关于 $\mathcal{F}_{k+1}$ 可测，从而 Y_{k+1} 关于 $\mathcal{F}_{k+1}$ 可测.

再考虑解的惟一性，因为(1)式可以写为(3)式的形式，即

$$Y_{k+1}(\omega) = \sum_{n=0}^{N} M(Y_k, n, k, \omega)\chi_{\{n=\theta_{k+1}\}}, \quad (4)$$
$$Y_0(\omega) = y_0 \in \mathbb{R}^d.$$

由于 $M(x, n, k, \omega)$ 在一个零测集外是关于 $x\in\mathbb{R}^d$ 是连续的，用归纳法，设 Y_k 惟一，则由 θ_k 惟一，并且状态空间为有限，可得 Y_{k+1} 惟一. 从而我们可以得到序列的惟一性.

对于(2)式，我们有如下类似的结果：

定理2 设 $M(x, s, k, \omega)$ 是具有参数 x 和 s 的适应序列，在 $\{\theta_k: k=0, 1\cdots, N\}$ 初始分布给定的情况下，由(2)式确定的序列是关于 $\mathcal{F}_k$ 适应的，特别的，如果对 $\forall k, n$, $M(x, n, k, \omega)$ 有一个关于 $x\in\mathbb{R}^d$ 连续的修正，则此序列是惟一的.

证 首先，序列可以递归得到. 再看它的适应性：用归纳法，显然 y_0 是 $\mathcal{F}_0$ 可测的，设 y_k 关于 $\mathcal{F}_k$ 可测，注意当给定 $Y_k\in\mathbb{R}^d$ 后，有

$$Y_{k+1} = M(Y_k, \theta_{k+1}, k+1, \omega) = \sum_{n=0}^{N} M(Y_k, n, k+1, \omega)\chi_{\{n=\theta_k\}} \quad (5)$$

是 $\mathcal{F}_{k+1}$-可测的. 这是因为对 $\forall n$, $M(Y_k, n, k+1, \omega)$ 关于 $\mathcal{F}_{k+1}$ 可测，同理可得 $M(Y_k, n, k+1, \omega)$ 关于 $\mathcal{F}_{k+1}$ 可测，又 θ_k 关于 $\mathcal{F}_{k+1}$ 可测，从而 Y_{k+1} 关于 $\mathcal{F}_{k+1}$ 可测.

最后考虑惟一性，因为系统(2)可以写为(5)的形式，即

$$Y_{k+1}(\omega) = \sum_{n=0}^{N} M(Y_k, n, k, \omega)\chi_{\{n=\theta_k\}},$$
$$Y_0(\omega) = y_0 \in \mathbb{R}^d. \quad (6)$$

作类似于定理1的讨论并用归纳法，设 Y_k 惟一，则由 θ_k 惟一，并且状态空间为有限，可得 Y_{k+1} 惟一. 从而我们可以得到惟一性.

由于在上述定理中我们没有对适应序列 $\{M(x, n)\}_{n\geqslant 0}$ 的随机结构做太多的假定，所以我们不能期望上面的存在惟一性定理中给出系统更多好的性质. 从(1)和(2)式的形式看来，可以给出一个并不是很强的条件，而期望它们所确定的离散随机系统是一个局部鞅甚至是一个鞅. 我们需要用到文献[6]的若干假定. 首先，对于一个以 $x\in D\subset\mathbb{R}^d$ 为空间参数的鞅 $M(x, k, \omega)$ 定义它的协变差序列为

$$A(x, y, n) = \langle M(x, n), M(y, n)\rangle = \sum_{j=1}^{n}(M(x, j) - M(x, j-1))\cdot(M(y, j) - M(y, j-1)). \quad (7)$$

关于协变差序列我们做如下假设条件：

假设Ⅰ 存在 $A(x, y, n)$ 的一个修正，使得

$$A(x, y, n) = \sum_{k=1}^{n} a(x, y, k),$$

其中 $\{a(x, y, k), \mathcal{F}_k\}_{k\geqslant 0}$ 是一个满足以下条件(可和性)的 C^m-值适应序列，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\| a(x, y, k)\|_{m:K}^{*} < \infty.$$

假设Ⅱ $p = (p_k, \mathcal{F}_k)$ 是一个 D-值的适应随

机序列，对所有的 x，j，k，有可和性

$$\sum_{k=0}^{\infty} a(p_k, p_k, k) < \infty, a.s.$$

假设Ⅲ 将假设Ⅰ中的空间 C^m 变为连续函数空间 C，同时假设Ⅱ成立.

下面的引理与文献[6]中的定理 4.7 的结论是类似的，但是其证明不同.

引理1 设 $M(x, k)$ 是 C^m-鞅满足假设Ⅰ，适应序列 $\{p_k\}$ 满足假设Ⅱ如果对 $k \neq j$，k，$j \geqslant 0$，有 $M(x, k+1) - M(x, k)$ 和 $M(x, j+1) - M(x, j)$ 不相关，则由

$$F_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} [M(p_k, k+1) - M(p_k, k)]. \quad (8)$$

定义的适应序列 $\{p_k\}$ 关于鞅 $M(x, k)$ 的非线性鞅变换列 $\{F_n(p)\}$ 是一个 $\mathcal{F}_n$ 局部鞅.

证 先证明 $\{M(x, k)\}_{k \geqslant 0} \in \mathcal{M}_0 (\forall x)$ 的情形. 由上面的假定，存在一个 C^m-适应的随机序列 $a(x, y, k)$ 使得

$$A(x, y, n) = \sum_{k=1}^{n} (M(x, k) - M(x, k-1)) \cdot (M(y, k) - M(y, k-1)) = \sum_{k=1}^{n} a(x, y, k).$$

递推地有

$$(M(x, k+1) - M(x, k))^2 = a(x, x, k+1). \quad (9)$$

由于 $a(x, y, k+1) \in C^m$，则有

$$(M(p_k, k+1) - M(p_k, k))^2 = a(p_k, p_k, k+1). \quad (10)$$

对(10)式两端取期望，得到

$$E[(M(p_k, k+1) - M(p_k, k))^2] = E[a(p_k, p_k, k+1)].$$

则

$$E\left[\sum_{k=1}^{\infty} (M(p_k, k+1) - M(p_k, k))^2\right] \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} E[a(p_k, p_k, k+1)].$$

因为 $M(x, k)$ 有不相关的增量，这就意味着有

$$\{E[|F(p, n)|]\}^2 \leqslant E[|F(p, n)|^2] < \infty.$$

特别的，因为

$$F(p, k+1) - F(p, k) = \sum_{j=0}^{k} [M(p_j, j+1) - M(p_j, j)] - \sum_{j=0}^{k-1} M(p_j, j+1) - M(p_j, j) = M(p_k, k+1) - M(p_k, k). \quad (11)$$

从而

$$E[F(p, k+1) - F(p, k) | \mathcal{F}_k] = E[M(p_k, k+1) - M(p_k, k) | \mathcal{F}_k] = E[M(x, k+1) - M(x, k) | \mathcal{F}_k]_{x = p_k} = 0. \quad (12)$$

即

$$E[F(p, k+1) | \mathcal{F}_k] = F(p, k).$$

从而 $\{F(p, n)\}$ 是一个鞅，并且 $\{F(p, n)\} \in \mathcal{M}_0$.

再考虑 $\{M(x, k)\}_{k \geqslant 0}$ 为任意的鞅或局部鞅情形. 给定 D 的一个紧子集 K 和一个非负整数 $n \geqslant 0$，令

$$T_{K,n} = \inf\left\{k : \sum_{j=1}^{k} \| a(x, y, j) \|_{0:K}^{*} \geqslant n\right\}.$$

则 $T_{K,n}$ 是一列停时，$P\{T_{K,n} < \infty\} \to 0 (n \to \infty)$ 对每一个 K 成立. 停止序列

$$M^{T_{K,n}}(x, k) = M(x, k \wedge T_{K,n})$$

属于 $\mathcal{M}_0$ (对任意的 x 和 K). 实际上，对 $\forall k$，$M^{T_{K,n}}$ 的方括号过程 $[M^{T_{K,n}}]$，有

$$[M^{T_{K,n}}(x, k)] = A^{T_{K,n}}(x, x, k) = \sum_{j=1}^{k \wedge T_{K,n}} a(x, x, j) \leqslant \sum_{j=1}^{k \wedge T_{K,n}} \| a(x, x, j) \|_{0:K}^{*} \sup_{y \in K} (1 + |y|)^2. \quad (13)$$

由 $T_{K,n}$的定义，可以看出

$$(13)\text{式} \leqslant n \sup_{y\in K}(1+|y|)^2. \tag{14}$$

因为 $M(x,k)$ 有不相关增量，$M^{T_{K,n}}(x,k)\in\mathcal{M}_0$.

对适应序列 p_k，定义

$$p_k^K = \begin{cases} p_k, & \text{若}\ p_k \in K, \\ x_0, & \text{若}\ p_k \notin K, \end{cases}$$

这里 $x_0\in K$ 固定. 由上面的证明，我们知道 $\{F^{T_{K,n}}(p^K,k)\}\in\mathcal{M}_0$. 显然 $F^{T_{K,n}}(p^K,k)$ 收敛到 $F(p,k)$($L^2(\Omega)$ 意义下，当 $n\to\infty$ 时)，并且 $K\nearrow D$ 对任意的 k 一致，从而在 l_∞收敛. 由文献[6]引理 4.6，$\{F(p,k)\}\in\mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$.

定理3 假设对任意的 s，k，$M(x,s,k)$ 有一个关于 $x\in\mathbb{R}^d$ 连续的修正，并且它和由(2)式确定的 Y_k满足假设Ⅰ和假设Ⅱ. 对任意的 $x\in\mathbb{R}^d$，$1\leqslant s\leqslant N$ 对于 $k\neq j$，k，$j\geqslant 0$，$M(x,s,k+1)-M(x,s,k)$ 和 $M(x,s,j+1)-M(x,s,j)$ 不相关，则 Y_k 是一个局部鞅.

证 注意到引理1的证明中，只要函数空间一阶连续即可，我们可以重复它的证明得到此定理结论，但是要注意的是：本定理中的适应序列是(Y_k,θ_k)，我们可以把它作为新的 $d+1$ 维适应序列 $\widetilde{Y}_k=(Y_k,\theta_k)$，引理中的 p_k在此即为 $\widetilde{Y}_k$.

注 如果 $M(x,s,k)$ 满足：对任意的自然数 k

$$\sup_{x,s} E|M(x,s,k)| < \infty,$$

则有 Y_k可积. 这是因为：显然 Y_1可积，归纳的若 Y_k可积，则：

$$\begin{aligned} &E|M(Y_k,\theta_k,\omega,k+1)| \leqslant \\ &\sum_{s=0}^{N}\int |M(Y_k,s,\omega,k+1)|P(\mathrm{d}\omega) = \\ &\sum_{s=0}^{N}\iint |M(x,s,\omega,k+1)|P(\mathrm{d}\omega)P(Y_k\in\mathrm{d}x) = \\ &\sum_{s=0}^{N}\iint |M(Y_k,s,\omega,k+1)|P(Y_k\in\mathrm{d}x)P(\mathrm{d}\omega) \leqslant \\ &\sum_{s=0}^{N}\int \sup_x E|M(x,s,k)|P(Y_k\in\mathrm{d}x) < \infty. \end{aligned} \tag{15}$$

同理，$E|M(Y_k,\theta_k,\omega,k)|<\infty$. 于是有

$$\begin{aligned} E|Y_{k+1}| = E|&(Y_k + M(Y_k,\theta_k,k+1) - \\ &M(Y_k,\theta_k,k)| < \infty \end{aligned}$$

对任意 k 成立. 另外，由于

$$\begin{aligned} &E[Y_{k+1}|\mathcal{F}_k] = \\ &E[Y_k + M(Y_k,\theta_k,k+1) - M(Y_k,\theta_k,k)|\mathcal{F}_k] = \\ &Y_k + E[M(Y_k,\theta_k,k+1) - M(Y_k,\theta_k,k)|\mathcal{F}_k] = \\ &Y_k + E[M(x,s,k+1) - M(x,s,k)|\cdot \\ &\mathcal{F}_k]_{x=Y_k,\,s=\theta_k} = Y_k. \end{aligned} \tag{16}$$

得到方程的解是一个鞅.

如果将上述的鞅差列具有一致可积性(17)，则有下面的收敛性.

定理4 假设对任意的 s，k，$M(x,s,k)$ 有一个关于 $x\in\mathbb{R}^d$ 连续的修正，并且它和由(2)式确定的 Y_k 满足假设Ⅰ和假设Ⅱ. 对任意的 $x\in\mathbb{R}^d$，$1\leqslant s\leqslant N$ 对于 $k\neq j$，k，$j\geqslant 0$，$M(x,s,k+1)-M(x,s,k)$ 和 $M(x,s,j+1)-M(x,s,j)$ 不相关，若存在一常数 C，使得

$$E[|M(x,s,k+1)-M(x,s,k)|]\leqslant C,\ \forall x,\ \forall s \tag{17}$$

则对任何一个可和停时 T，即 $E[T]<\infty$，有 $E[|Y_T|]<\infty$ 且

$$\lim_{n\to\infty} E[|Y_n|I_{T\geqslant n}] = 0.$$

证 令 $Z_0=|Y_0|$，$Z_k=|Y_k-Y_{k-1}|$，$k\geqslant 1$，有，

$$\begin{aligned} &E\Big[\sum_{j=0}^{T}|Z_j|\Big] = \sum_{n=0}^{\infty}E\Big[\sum_{j=0}^{n}|Z_j|I_{[T=n]}\Big] = \\ &\sum_{j=0}^{\infty}E[|Z_j|I_{[T\geqslant j]}] = \\ &\sum_{j=1}^{\infty}E[E[Z_j|\mathcal{F}_{j-1}]I_{[T\geqslant j]}] + E[Z_0] = \\ &\sum_{j=1}^{\infty}E[|M(Y_{j-1},\theta_{j-1},j) - \\ &M(Y_{j-1},\theta_{j-1},j-1)|I_{[T\geqslant j]}] + E[Z_0] \leqslant \\ &C\sum_{j=1}^{\infty}P(T\geqslant j) + E[|Y_0|] = \\ &CE[T] + E[|Y_0|] < \infty. \end{aligned}$$

由于 $|Y_T| \leqslant \sum_{j=0}^{T} Z_j$，所以有 $E[|Y_T|] < \infty$. 同时

$$E[|Y_n| I_{[T \geqslant n]}] \leqslant E\Big[\sum_{j=0}^{T} Z_j I_{[T \geqslant n]}\Big] \to 0, n \to \infty.$$

利用上述定理直接可得：

推论 若定理4中条件成立，则对任何一个可和停时，有

$$E[Y_T] = E[Y_0].$$

2 系统的 Markov 性、不可约性和常返性

下面我们讨论离散随机控制系统的 Markov 性，一般说来(2)式不具有 Markov 性质，但是，可以证明 $\{(Y_k, \theta_k)\}_{k \geqslant 0}$ 是具有 Markov 性质的. 为此我们需要下面的引理，其证明见文献[12] 附录定理 4.5.

引理2 设 f: $\mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{F}$-可测的，$\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数. 若 $\forall x \in \mathbb{R}^d$，$f(x, \cdot)$ 关于 $\mathcal{F}'$ 独立，ξ: $\Omega \to \mathbb{R}^d$ 是 $\mathcal{F}'$-可测的，则

$$E[f(\xi(\omega), \omega) | \mathcal{F}'] = E[f(x, \omega)]_{x=\xi}. \quad (18)$$

定理5 如果 $M(x, s, \omega, k+1) - M(x, s, \omega, k)$ 关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(N) \times \mathcal{F}'_k$ 可测，其中 $\{\mathcal{F}'_k\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数，并且对固定的 x，s，$\forall k$，$M(x, s, \cdot, k+1) - M(x, s, \cdot, k)$ 与 $\mathcal{F}_k$ 独立. Y_k 是由(2)式确定的离散随机控制系统，则 (Y_k, θ_k) 是一个 Markov 序列.

证明是简单的(略).

最后考虑 (Y_k, θ_k) 的时齐性和 ϕ 不可约及 ϕ 常返性.

定理6 (时齐性)如果序列 $M(x, s, k)$ 满足平稳性条件，即对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $s \in \mathbb{N}$，$M(x, s, n+1) - M(x, s, n)$ 对任意的 n 有相同的分布，并且 θ_k 是时齐的 Markov 链，则序列 (Y_k, θ_k) 有时齐的转移函数 $P((x, s), A \times (j))$.

证 我们已经证明了在定理5条件下，(Y_k, θ_k) 是一个 Markov 序列，下面计算它的转移概率 $P((x, s), A \times (j))$，其中 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的任意 Borel 集合.

$$\begin{aligned}
&P_{k,k+1}((x,s), A \times (j)) = \\
&P\{(Y_{k+1}, \theta_{k+1}) \in A \times (j) | Y_k = x, \theta_k = s\} = \\
&P\{(Y_k + M(Y_k, \theta_k, k+1) - M(Y_k, \theta_k, k), \theta_{k+1}) \cdot \\
&\in A \times (j) | Y_k = x, \theta_k = s\} = \\
&P\{x + M(x, s, k+1) - M(x, s, k) \in A, \theta_{k+1} = \\
&j | Y_k = x, \theta_k = s\}.
\end{aligned} \quad (19)$$

因为 $M(x, s, k)$ 和 θ_k 都是时齐的，我们有

$$\begin{aligned}
&P_{k,k+1}((x,s), A \times (j)) = \\
&P\{x + M(x,s,k+1) - M(x,s,k) \in A, \theta_1 = \\
&j | Y_k = x, \theta_0 = s\} = \\
&P\{x + M(x,s,1) - M(x,s,0) \in A, \theta_1 = \\
&j | Y_0 = x, \theta_0 = s\} = \\
&P\{Y_0 + M(Y_0, \theta_1 = j, 1) - M(Y_0, \theta_1 = \\
&j, 0) \in A, \theta_1 = j |, Y_0 = x, \theta_0 = s\} \\
&= P_{0,1}((x,s), A \times (j)).
\end{aligned} \quad (20)$$

因为对任意的 k，$M(x, s, k)$ 关于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{N})$-可测，显然 $P((x, s), A \times (j))$ 是一个转移核，从而，(Y_k, θ_k) 有时齐的转移函数 $P((x, s), A \times (j))$.

我们给出 (Y_k, θ_k) 的 ϕ-不可约和 ϕ-常返的定义和一个充分条件：

定义1 (Y_k, θ_k) 是一个时齐 Markov 链，称它是 ϕ-不可约的，如果存在 $\mathbb{R}^d$ 上的一个 σ-可加的测度 ϕ，使得对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$，

$$\phi(A) > 0 \Rightarrow P\{T_A < \infty | Y_0 = x\} > 0,$$

其中 $T_A := \inf(n \geqslant 1: Y_n \in A)$，特别的，如果

$$\phi(A) > 0 \Rightarrow P\{T_A < \infty | Y_0 = x\} = 1.$$

则称它是 ϕ-常返的.

定理7 (ϕ-不可约以及 ϕ-常返) ϕ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个 σ-可加测度，当 $\phi(A) > 0$ 时，$P\{(x + M(x, s, 1) \in A\} > 0$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $s \in \{1, 2, \cdots n\}$ 成立，则 (Y_k, θ_k) 是 ϕ-不可约. 特别的，若存在一个正常数 $\delta(A)$，使得对所有的 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $s \in \{1, 2, \cdots n\}$，$P\{x + M(x, s, 1) \in A\} > \delta(A)$，则 (Y_k, θ_k) 是 ϕ-常返的.

证明是简单的(略). 我们可以把定理中的条件减弱：

推论 ϕ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个 σ-可加测度，当 $\phi(A) > 0$ 时，$P\{x + M(x, s, 1) \in A\} > 0$ 对某一个

$s \in \{1, 2, \cdots n\}$ 和 $\forall x \in \mathbb{R}^d$ 成立,则 (Y_k, θ_k) 是 ϕ-不可约的.

证 由于 θ_k不可约、状态有限,可知它是遍历的,从而存在 k,使得

$$P(\theta_k = s \mid \theta_0 = i) > 0.$$

则

$$P\{\tau_A < \infty\} = P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\tau_A = n)\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\tau_A = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y_n \text{首达} A\} \geqslant P\{Y_{k+1}\text{首达} A\} + \sum_{n=1}^{k} P(Y_n \text{首达}A) = P(Y_{k+1} \in A \mid Y_0 = x, \theta_0 = i, Y_1, \cdots, Y_k \notin A) + \sum_{n=1}^{k} P(Y_n \text{首达}A) = P(Y_{k+1} \in A \mid Y_0 = x, \theta_0 = i, Y_1, \cdots, Y_k \notin A, \theta = s) + P(Y_{k+1} \in A \mid Y_0 = x, \theta_0 = i, Y_1, \cdots, Y_k \notin A, \theta \neq s) + \sum_{n=1}^{k} P(Y_n \text{首达} A) \geqslant P(x + M(x, s, 1) \in A \parallel Y_0 = x, \theta_0 = i, Y_1, \cdots, Y_k \notin A, \theta = s) + \sum_{n=1}^{k} P(Y_n \text{首达} A) > 0. \tag{21}$$

最后用一个例子结束本文的讨论.

例 令 $M(x, s, k) = x^s \sum_{i=0}^{k} \zeta_i$,其中 ζ_i,$i = 0, 1, \cdots$ 是i.i.d.随机变量列,$P(\zeta_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$,$\theta_k$是一个 Markov 链,其状态空间是 $\{0, 1, 2\}$,转移矩阵是

$$(p_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ P & 0 & 1-P \end{pmatrix}, \tag{22}$$

其中 $p > 0$. 从方程(2),我们有

$$Y_{k+1} = Y_k + M(Y_k, \theta_k, k+1) - M(Y_k, \theta_k, k) = Y_k + Y_k^{\theta_k}\left(\sum_{i=0}^{k+1} \zeta_i - \sum_{i=0}^{k} \zeta_i\right) = Y_k + Y_k^{\theta_k} \zeta_{k+1}, \tag{23}$$

从而对任意的 Borel 集 $B \subset R$ 和状态 $j \in \{0, 1, 2\}$ 转移概率是

$$P\{(Y_{k+1}, \theta_{k+1}) \in B \times (j) \mid (Y_k, \theta_k) = (x, i)\} = P\{(Y_k + Y_k^{\theta_k} \zeta_{k+1}, \theta_{k+1}) \cdot \in B \times (j) \mid Y_k = x, \theta_k = i\} = P\{(x + x^i \zeta_{k+1}, \theta_{k+1}) \in B \times (j)\}. \tag{24}$$

当 $i = 2$ 时,有

$$P\{(Y_{k+1}, \theta_{k+1}) \in B \times (j) \mid Y_k = x, \theta_k = 2\} = p_{2j} \times \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{如果 } x + x^2 \in B, \quad x - x^2 \notin B; \\ \frac{1}{2}, & \text{如果 } x - x^2 \in B, \quad x + x^2 \notin B; \\ 1, & \text{如果 } x + x^2 \in B, \quad x - x^2 \in B; \\ 0, & \text{如果 } x + x^2 \notin B, \quad x - x^2 \notin B; \end{cases}$$

其中 $p_{20} = p$,$p_{21} = 0$,$p_{22} = 1 - p$. 类似的可以计算当 $i = 0$ 和 $i = 1$ 时的情形.

参 考 文 献

1 Kannan D. Discrete-time nonlinear filtering with marked point process observations: II. Risk-sensitive filters. Stochastic Analysis and Applications, 2000, 18(2): 261

2 Kuo B C. Automatic Control Systems. 6th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990

3 Kelley F P. Reversibility and Stochastic Networks. New York: John Wiley & Sons, 1979

4 Gray R M. Entropy and Information Theory. New York: Springer-Verlag, 1990

5 Pakes A, et al. Simulation and the asymptotics of optimization estimators. Econometrica, 1998, 57: 1027

6 Zhang Bo, et al. Discrete time Martingales with spatial parameters. Stochastic Analysis and Applications, 2002, 20(5): 1101

7 Bielecki T, et al. Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems. Operational Research , 1988, 36: 532

8 Ghosh M K, et al. Optimal control of switching diffusion with application to flexible manufacturing systems. SIAM Journal on Control and Optimization, 1993, 31: 1183

9 Ghosh M K , et al. Ergodic control of switching diffusion. SIAM Journal on Control and Optimization, 1997, 35: 1952

10 Meyn S P, et al. Markov Chains and Stochastic Stability. London: Springer-Verlag, 1996

11 Kunita H. Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. London: Cambridge University Press, 1990

12 Bhattacharya R N. Stochastic Processes with Applications. John Wiley & Sons, 1992